# ĐẠI SỐ CỦA TÍCH ĐAN VÀ CÁC DẠNG TƯƠNG ĐƯƠNG

**Bùi Văn Chiến, Bùi Văn Hiếu**

Khoa Toán, Trường đại học Khoa học, Đại học Huế

Email: bvchien@hueuni.edu.vn

*Ngày nhận bài: 27/9/2018; ngày hoàn thành phản biện: 8/11/2018; ngày duyệt đăng: 10/12/2018*

**TÓM TẮT**

Mục đích của bài báo này là trình bày một dạng tổng quát của tích đan (shuffle product) và tích stuffle dựa trên một tham số $q$ hoạt động trong trường mở rộng của trường các số hữu tỉ. Những đại số Hopf từ đó được hình thành tương ứng đối với tích này và chúng tôi chứng minh chúng đẳng cấu với đại số Hopf của tích đan ban đầu.

**Từ khóa:** Đại số Hopf; tích đan; đại số quasi-shuffle; đại số trên từ vựng.

## 1. GIỚI THIỆU

Tích đan (shuffle product) lần đầu tiên xuất hiện năm 1953 trong một nghiên cứu của Eilenberg và MacLane [9]. Với mỗi bảng chữ cái (alphabet) $A$, tích đan của hai từ được định nghĩa truy hồi bởi công thức[1]

$$\forall a, b \in A,\ u, v \in A^*, \quad u \sqcup\!\sqcup 1_{A^*} = 1_{A^*} \sqcup\!\sqcup u = u,\ au \sqcup\!\sqcup bv = a(u \sqcup\!\sqcup bv) + b(au \sqcup\!\sqcup v). \tag{1}$$

Ngay sau đó, vào năm 1954, Chen [1] đã sử dụng tích này để biểu diễn tích phân lặp còn Ree [13] chứng minh được rằng các chuỗi không giao hoán là những hàm mũ của những đa thức Lie xây dựng dựa trên trên tiêu chuẩn Friedrichs. Chính vì những lẻ đó mà tích đan và đa thức Lie có mối quan hệ chặt chẽ với nhau mở ra các hướng nghiên cứu sâu hơn sau này (xem [14]). Hai mươi năm sau, vào năm 1973, Knutson đã giới thiệu một tích khác ở công trình [12], gọi là tích stuffle, mang cấu trúc của đại số tựa đối xứng (quasi-symmetric). Tích stuffle định nghĩa trên bảng chữ cái có chỉ số $Y = \{y_k\}_{k \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$:

$$y_{k_1}, y_{k_2} \in Y, u, v \in Y^*, \quad y_{k_1}u \uplus y_{k_2}v \quad = \quad y_{k_1}(u \uplus y_{k_2}v) + y_{k_2}(y_{k_1}u \uplus v) + y_{k_1+k_2}(u \uplus v). \tag{2}$$

Bài báo này trình bày một dạng tổng quát của hai tích trên bằng cách tham số hóa, gọi là tích $q$-stuffle, với tham số $q$ hoạt động trong một trường mở rộng của trường các số hữu tỉ[2] [2, 3, 4]:

$$y_{k_1}, y_{k_2} \in Y, u, v \in Y^*, \quad y_{k_1}u \uplus_q y_{k_2}v \quad = \quad y_{k_1}(u \uplus_q y_{k_2}v) + y_{k_2}(y_{k_1}u \uplus_q v) + qy_{k_1+k_2}(u \uplus_q v).$$

Từ tích này, cặp đại số Hopf đối ngẫu được hình thành

$$(K\langle Y\rangle, \uplus_q, 1_{Y^*}, \Delta_{conc}, \varepsilon, \mathcal{S}^{\uplus_q}) \rightleftharpoons (K\langle Y\rangle, conc, 1_{Y^*}, \Delta_{\uplus_q}, \varepsilon, \mathcal{S}_q^{conc}).$$

[1] $A^*$ ký hiệu tập hợp tất cả các từ vựng từ bảng chữ cái $A$ bao gồm cả từ rỗng $1_{A^*}$.

[2] Khi $q = 0$ hay $q = 1$ tích này trở thành tích đan hay tích stuffle tương ứng.

Các kết quả trong bài báo này phần lớn đã được công bố trong nghiên cứu [2, 4] nhưng ở đây chúng tôi trình bày theo hướng khác hơn dựa theo cách dẫn dắt vấn đề của luận án [3] (xem thêm [6, 5, 7]). Kết quả quan trọng của bài báo này là chứng minh sự đẳng cấu của các cấu trúc đại số trong mọi trường hợp của tham số $q$. Chúng tôi sẽ chứng minh (xem Định lý 7)

$$\varphi(w) = \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in\mathcal{C}(|w|)} \frac{1}{i_1!\ldots i_k!}(i_1,\ldots,i_k)[w]$$

là một đẳng cấu đại số từ $(\mathbb{K}\langle Y\rangle, ⧢)$ vào $(\mathbb{K}\langle Y\rangle, ⧢_q)$.

## 2. ĐẠI SỐ CỦA TÍCH ĐAN

### 2.1. Tổ hợp trên từ vựng

Với một tập hợp các ký tự bất kỳ, $A = \{a_i\}_{i\in I}$, mà ta gọi là một *bảng chữ cái* (alphabet), mỗi dãy hữu hạn các chữ cái xác định một *từ*. $A^*$ ký hiệu là tập hợp tất cả các từ tạo nên từ bảng chữ cái $A$ bao gồm cả từ rỗng[3], được ký hiệu là $1_{A^*}$. Mỗi chữ cái cũng là một từ có độ dài bằng 1 và với mỗi từ $w = a_{i_1}\ldots a_{i_k}, a_{i_j} \in A$ có độ dài $|w| = k$. Việc đặt liên tiếp hai từ liền nhau để tạo thành một từ mới được gọi là *tích ghép* (concatenation product) giữa hai từ đó. Tích ghép được viết

$$\forall u, v \in A^*, \quad u.v = uv \in A^*. \tag{3}$$

Với mỗi bảng chữ cái, nếu ta định nghĩa một thứ tự nhất định cho các chữ cái thì các từ vựng cũng hình thành một thứ tự từ điển:

$$u \prec v \text{ nếu tồn tại } w, u', v' \in A^*,\ a_i, a_j \in A, a_i \prec a_j \text{ sao cho } u = wa_iu', v = wa_jv'. \tag{4}$$

Ta ký hiệu $\mathbb{K}$ vành giao hoán (có đơn vị). Một đa thức (hình thức) là một tổ hợp tuyến tính các từ trên $A^*$ với hệ số trên $\mathbb{K}$ và ta ký hiệu $\mathbb{K}\langle A\rangle$ tập hợp các đa thức như vậy. Khi đó ta có thể viết

$$P \in \mathbb{K}\langle A\rangle \Leftrightarrow P = \sum_{w\in A^*} \langle P \mid w\rangle w, \tag{5}$$

trong đó $\langle P \mid w\rangle$ ký hiệu hệ số của từ $w$ trong đa thức $P$. Khi đó $A^*$ cùng với tích ghép và phần tử trung hòa $1_{A^*}$ lập thành một monoid và $\mathbb{K}\langle A\rangle$ là một đại số (tự do) không giao hoán của $A^*$.

### 2.2. Cấu trúc đại số của tích đan

Từ định nghĩa của tích đan ở công thức (1), ta mở rộng tuyến tính tích này lên không gian các đa thức: $⧢ : \mathbb{K}\langle A\rangle \otimes \mathbb{K}\langle A\rangle \longrightarrow \mathbb{K}\langle A\rangle,\ u\otimes v \longmapsto u ⧢ v$. Đối ngẫu[4] của nó là một đối tích [14] được xác định bởi

$$\begin{aligned} \Delta_{⧢} : \mathbb{K}\langle A\rangle &\longrightarrow \mathbb{K}\langle A\rangle \otimes \mathbb{K}\langle A\rangle \\ w &\longmapsto \sum_{u,v\in A^*} \langle w \mid u ⧢ v\rangle u\otimes v. \end{aligned} \tag{6}$$

Cùng với nó, tích ghép, ký hiệu bởi *conc*, cũng được mở rộng tuyến tính tương tự và một cặp cấu trúc đại số Hopf đối ngẫu [14] được hình thành

$$\mathcal{H}_{⧢} := (\mathbb{K}\langle A\rangle, conc, 1_{A^*}, \Delta_{⧢}, \varepsilon) \text{ và } \mathcal{H}_{⧢}^{\vee} := (\mathbb{K}\langle A\rangle, ⧢, 1_{A^*}, \Delta_{conc}, \varepsilon), \tag{7}$$

trong đó $\varepsilon$ là ánh xạ lấy ra hằng số tự do của một đa thức, tức là

$$\varepsilon : \mathbb{K}\langle A\rangle \longrightarrow \mathbb{K}, \quad P \longmapsto \langle P \mid 1_{A^*}\rangle. \tag{8}$$

[3]Từ rỗng là dãy không có ký tự nào.

[4]Hai tích đối ngẫu theo nghĩa: với mọi $u, v, w \in A^*$, $\langle \Delta_{⧢}(w) \mid u\otimes v\rangle = \langle w \mid u ⧢ v\rangle$.

# 3. ĐẠI SỐ CỦA TÍCH $q$-STUFFLE

## 3.1. Định nghĩa tích $q$-stuffle

Chúng tôi xét bảng chữ cái gồm vô hạn các ký tự $Y := \{y_k \mid k \geq 1\}$ với thứ tự từ điển[5] $y_1 \succ y_2 \succ \ldots$. Với tham số $q$ hoạt động trong trường mở rộng của trường các số hữu tỉ, tích $q$-stuffle xác định bởi công thức truy hồi sau.

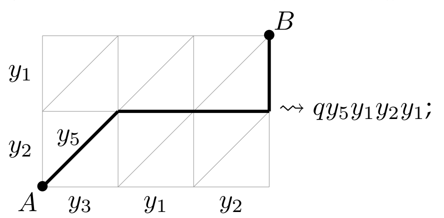
**Định nghĩa 1** ([2, 3, 4]). Với mọi $y_{k_1}, y_{k_2} \in Y$ và $u, v \in Y^*$,

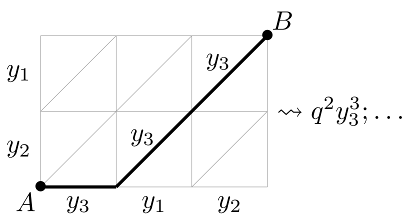
$$
\begin{aligned}
u \uplus\!\!\!\uplus_q 1_{Y^*} &= 1_{Y^*} \uplus\!\!\!\uplus_q u = u, && (9)\\
y_{k_1}u \uplus\!\!\!\uplus_q y_{k_2}v &= y_{k_1}(u \uplus\!\!\!\uplus_q y_{k_2}v) + y_{k_2}(y_{k_1}u \uplus\!\!\!\uplus_q v) + q y_{k_1+k_2}(u \uplus\!\!\!\uplus_q v). && (10)
\end{aligned}
$$

**Ví dụ 1.** i) Với $y_2y_1, y_3y_1y_2 \in Y^*$, ta có

$$
\begin{aligned}
y_2y_1 \uplus\!\!\!\uplus_q y_3y_1y_2 &= y_2(y_1 \uplus\!\!\!\uplus_q y_3y_1y_2) + y_3(y_2y_1 \uplus\!\!\!\uplus_q y_1y_2) + q y_5(y_1 \uplus\!\!\!\uplus_q y_1y_2)\\
&= y_2y_1y_3y_1y_2 + 2y_2y_3y_1^2y_2 + y_2y_3y_1y_2y_1 + q y_2y_3y_1y_3 + q y_2y_3y_2^2\\
&+ q y_2y_4y_1y_2 + 2y_3y_2y_1^2y_2 + y_3y_2y_1y_2y_1 + q y_3y_2y_1y_3 + q y_3y_2^3\\
&+ y_3y_1y_2y_1y_2 + 2y_3y_1y_2^2y_1 + q y_3y_1y_2y_3 + q y_3y_1y_4y_1 + q y_3^2y_1y_2\\
&+ q y_3^2y_2y_1 + q^2y_3^2y_3 + 2q y_5y_1^2y_2 + q y_5y_1y_2y_1 + q^2y_5y_1y_3 + q^2y_5y_2^2.
\end{aligned}
$$

Bằng cách dựng một bảng các ô vuông với các cạnh tương ứng với các chữ cái dựng nên bởi hai từ $y_2y_1, y_3y_1y_2$, trong đó mỗi đoạn xiên tương ứng với tham số $q$ và chữ cái có chỉ số bằng tổng của hai chỉ số các chữ cái ở cạnh ô vuông tương ứng, ta có thể quan sát tích này bằng cách tìm đường đi dạng phải-trên-xiên[6] từ điểm $A$ đến điểm $B$. Chẳng hạn:




Tích $q$-stuffle của hai từ $y_2y_1, y_3y_1y_2$ là tổng tất cả các đường đi từ $A$ đến $B$ theo cách trên.

ii) Khi $q = 1$, tích stuffle (thường được ký hiệu gọn bởi $\uplus\!\!\!\uplus$) :

$$
\begin{aligned}
y_2y_1 \uplus\!\!\!\uplus y_3y_1y_2 &= y_2(y_1 \uplus\!\!\!\uplus y_3y_1y_2) + y_3(y_2y_1 \uplus\!\!\!\uplus y_1y_2) + y_5(y_1 \uplus\!\!\!\uplus y_1y_2)\\
&= y_2y_1y_3y_1y_2 + 2y_2y_3y_1^2y_2 + y_2y_3y_1y_2y_1 + y_2y_3y_1y_3 + y_2y_3y_2^2\\
&+ y_2y_4y_1y_2 + 2y_3y_2y_1^2y_2 + y_3y_2y_1y_2y_1 + y_3y_2y_1y_3 + y_3y_2^3\\
&+ y_3y_1y_2y_1y_2 + 2y_3y_1y_2^2y_1 + y_3y_1y_2y_3 + y_3y_1y_4y_1 + y_3^2y_1y_2\\
&+ y_3^2y_2y_1 + y_3^2y_3 + 2y_5y_1^2y_2 + y_5y_1y_2y_1 + y_5y_1y_3 + y_5y_2^2.
\end{aligned}
$$

iii) Khi $q = 0$, bảng các ô vuông không còn các đoạn xiên, đường đi lúc này có dạng phải-trên, và ta có tích đan:

$$
\begin{aligned}
y_2y_1 \sqcup\!\!\!\sqcup y_3y_1y_2 &= y_2(y_1 \sqcup\!\!\!\sqcup y_3y_1y_2) + y_3(y_2y_1 \sqcup\!\!\!\sqcup y_1y_2)\\
&= y_2y_1y_3y_1y_2 + 2y_2y_3y_1^2y_2 + y_2y_3y_1y_2y_1 + 2y_3y_2y_1^2y_2\\
&+ y_3y_2y_1y_2y_1 + y_3y_1y_2y_1y_2 + 2y_3y_1y_2^2y_1.
\end{aligned}
$$

[5] $\succ$, $\prec$ hoặc $\succ_{lex}$, $\prec_{lex}$ ký hiệu thứ tự từ điển của bảng chữ cái.

[6] Đường đi chỉ di chuyển theo hướng sang phải, lên trên hoặc xiên phải.

### 3.2. Cấu trúc đại số của tích $q$-stuffle

Để thuận tiện cho việc tính toán, chúng tôi sử dụng $\mathbb{K}$ là vành đa thức một biến $q$ với hệ số trong trường $\mathbb{Q}$, *i.e.* $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[q]$. Từ định nghĩa trên, dễ thấy rằng tích $q$-stuffle có tính giao hoán, kết hợp. Điều này dẫn đến hệ quả rằng, nếu ta xem tích $\stuffle_q$ như là một ánh xạ bằng cách mở rộng tuyến tính lên không gian các đa thức $\mathbb{K}\langle Y\rangle$,

$$\stuffle_q : \mathbb{K}\langle Y\rangle \otimes \mathbb{K}\langle Y\rangle \longrightarrow \mathbb{K}\langle Y\rangle,\ u \otimes v \longmapsto u \stuffle_q v,$$

ta được cấu trúc đại số của tích $q$-stuffle.

**Mệnh đề 1.** $(\mathbb{K}\langle Y\rangle, \stuffle_q, 1_{Y^*})$ *là một đại số giao hoán, kết hợp và có đơn vị.*

Một cách tương tự như việc hình thành một cấu trúc đại số đối ngẫu của tích đan, ta cũng có một cấu trúc đại số Hopf đối ngẫu đối với tích $q$-stuffle. Trước tiên, ta định nghĩa một đối đại số, đối ngẫu với tích $q$-stuffle bởi

$$\begin{aligned} \Delta_{\stuffle_q} : \mathbb{K}\langle Y\rangle &\longrightarrow \mathbb{K}\langle Y\rangle \otimes \mathbb{K}\langle Y\rangle \\ w &\longmapsto \sum_{u,v\in Y^*} \langle w \mid u \stuffle v\rangle\, u \otimes v. \end{aligned} \tag{11}$$

Đối tích này có sự tương thích với tích ghép thể hiện ở mệnh đề sau.

**Mệnh đề 2.** $\Delta_{\stuffle_q}$ *là một đồng cấu của những đại số kết hợp, có đơn vị đối với tích ghép. Tức là*[7],

$$\forall u, v \in Y^*, \quad \Delta_{\stuffle_q}(uv) = \Delta_{\stuffle_q}(u)\Delta_{\stuffle_q}(v). \tag{12}$$

*Từ đó đối tích* $\Delta_{\stuffle_q}$ *có thể được định nghĩa trên tập sinh, biến* $1_{Y^*}$ *thành* $1_{Y^*} \otimes 1_{Y^*}$ *và xác định trên các chữ cái bởi công thức*

$$\Delta_{\stuffle_q}(y_k) \quad = \quad y_k \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes y_k + q \sum_{k_1+k_2=k} y_{k_1} \otimes y_{k_2}, \quad \forall y_k \in Y. \tag{13}$$

*Proof.* Gọi $\delta_1$ là ánh xạ xác định trên các chữ cái bởi

$$\delta_1(y_k) \quad = \quad y_k \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes y_k + q \sum_{k_1+k_2=k} y_{k_1} \otimes y_{k_2}, \quad \forall y_k \in Y.$$

Ta mở rộng ánh xạ này lên toàn không gian $\mathbb{K}\langle Y\rangle$, gọi là $\Delta_1$, theo sơ đồ phổ dụng

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "proj"'] & \mathbb{K}\langle Y\rangle \otimes \mathbb{K}\langle Y\rangle \\ \mathbb{K}\langle Y\rangle \arrow[ur, "\Delta_1"'] & \end{tikzcd}$$

Qua định nghĩa này, ta thấy rằng $\Delta_1$ phân bậc nên xác định một ánh xạ đối ngẫu, $\mu_{\Delta_1} : \mathbb{K}\langle Y\rangle \otimes \mathbb{K}\langle Y\rangle \to \mathbb{K}\langle Y\rangle$, thu hẹp từ ánh xạ đối ngẫu của $\Delta_1$ xác định từ $Hom(\mathbb{K}\langle Y\rangle \otimes \mathbb{K}\langle Y\rangle, \mathbb{K})$ vào $Hom(\mathbb{K}\langle Y\rangle, \mathbb{K})$. Tức là, với mọi $u, v, w \in Y^*$, $\langle \mu_{\Delta_1}(u \otimes v) \mid w\rangle = \langle u \otimes v \mid \Delta_1(w)\rangle$. Ta sẽ chứng minh $\mu_{\Delta_1}$ chính là $\stuffle_q$. Thật vậy, dễ thấy với trường hợp có từ rỗng

$$\mu_{\Delta_1}(u \otimes 1_{Y^*}) = \sum_{w\in Y^*} \langle u \otimes 1_{Y^*} \mid \Delta_1(w)\rangle\, w = u.$$

[7] Tích ghép trong không gian $\mathbb{K}\langle Y\rangle \otimes \mathbb{K}\langle Y\rangle$ được xác định với mọi $u_1, u_2, v_1, v_2 \in Y^*$, $(u_1 \otimes v_1)(u_2 \otimes v_2) = u_1u_2 \otimes v_1v_2$.

Ta chứng minh công thức truy hồi với mọi $y_i, y_j \in Y$ và $u, v \in Y^*$ và sử dụng giả thiết quy nạp *(để gọn hơn, ta ký hiệu* $1$ *thay vì* $1_{Y^*}$ *ở công thức dưới đây)*,

$$\begin{aligned}
\mu_{\Delta_1}(y_i u \otimes y_j v) &= \sum_{w \in Y^*} \langle y_i u \otimes y_j v \mid \Delta_1(w) \rangle\, w = \langle y_i u \otimes y_j v \mid 1 \otimes 1 \rangle + \sum_{w \in Y^*} \langle y_i u \otimes y_j v \mid \Delta_1(w) \rangle\, w \\
&= 0 + \sum_{y_k \in Y,\, w_1 \in Y^*} \langle y_i u \otimes y_j v \mid \Delta_1(y_k w_1) \rangle\, y_k w_1 \\
&= \sum_{y_k \in Y,\, w_1 \in Y^*} \langle y_i u \otimes y_j v \mid (y_k \otimes 1 + 1 \otimes y_k + q \sum_{k_1 + k_2 = k} y_{k_1} \otimes y_{k_2}) \Delta_1(w_1) \rangle\, y_k w_1 \\
&= \sum_{y_k \in Y,\, w_1 \in Y^*} \langle y_i u \otimes y_j v \mid (y_k \otimes 1) \Delta_1(w_1) \rangle\, y_k w_1 \\
&+ \sum_{y_k \in Y,\, w_1 \in Y^*} \langle y_i u \otimes y_j v \mid (1 \otimes y_k) \Delta_1(w_1) \rangle\, y_k w_1 \\
&+ \sum_{y_k \in Y,\, w_1 \in Y^*} \langle y_i u \otimes y_j v \mid (q \sum_{k_1 + k_2 = k} y_{k_1} \otimes y_{k_2}) \Delta_1(w_1) \rangle\, y_k w_1 \\
&= \langle u \otimes y_j v \mid \Delta_1(w_1) \rangle\, y_i w_1 + \langle y_i u \otimes v \mid \Delta_1(w_1) \rangle\, y_j w_1 + q \langle u \otimes v \mid \Delta_1(w_1) \rangle\, y_{i+j} w_1 \\
&= y_i \mu_{\Delta_1}(u \otimes y_j v) + y_j \mu_{\Delta_1}(y_i u \otimes v) + q y_{i+j} \mu_{\Delta_1}(u \otimes v)
\end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ rằng $\Delta_{\uplus_q} = \Delta_1$. □

**Ví dụ 2.**

$$\begin{aligned}
\Delta_{\uplus_q}(y_1) &= y_1 \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes y_1, \quad \Delta_{\uplus_q}(y_2) = y_2 \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes y_2 + q y_1 \otimes y_1, \\
\Delta_{\uplus_q}(y_3) &= y_3 \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes y_3 + q(y_1 \otimes y_2 + y_2 \otimes y_1).
\end{aligned}$$

Như ta đã thấy ở trên rằng $(\mathbb{K}\langle Y \rangle, \Delta_{conc}, \varepsilon)$ là một đối đại số. Hơn thế nữa, đối tích $\Delta_{conc}$ và đối đơn vị $\varepsilon$ còn tương thích với tích $q$-stuffle hay nói khác hơn, chúng là những đồng cấu đối với tích này qua khẳng định sau đây.

**Mệnh đề 3.** *$\mathcal{B}_q^{\uplus} := (\mathbb{K}\langle Y \rangle, \uplus_q, 1_{Y^*}, \Delta_{conc}, \varepsilon)$ là một song đại số.*

*Proof.* Với mọi $u, v \in Y^*$, dễ thấy rằng $\varepsilon(u \uplus_q v) = \varepsilon(u) \uplus_q \varepsilon(v)$ nhờ tính bảo toàn bậc của tích $q$-stuffle. Tiếp theo, dựa vào tính đối ngẫu, ta chứng minh $\Delta_{conc}$ là đồng cấu đối với tích $q$-stuffle, tức là $(\uplus_q \otimes \uplus_q) \circ \tau_{2,3} \circ (\Delta_{conc} \otimes \Delta_{conc}) = \Delta_{conc} \circ \uplus_q$. Thật vậy, với mọi $u_1, v_1, u_2, v_2 \in Y^*$, ta có

$$\begin{aligned}
&\langle \Delta_{conc} \circ \uplus_q(u_1 \otimes v_1) \mid u_2 \otimes v_2 \rangle = \langle \Delta_{conc}(u_1 \uplus_q v_1) \mid u_2 \otimes v_2 \rangle \\
= &\langle u_1 \uplus_q v_1 \mid conc(u_2 \otimes v_2) \rangle = \langle u_1 \otimes v_1 \mid (\Delta_{\uplus_q} \circ conc)(u_2 \otimes v_2) \rangle.
\end{aligned}$$

Vì $\Delta_{\uplus_q}$ là đồng cấu đối với tích ghép (xem Mệnh đề 2), tổng này là[8]

$$\begin{aligned}
&\langle u_1 \otimes v_1 \mid (conc \otimes conc) \circ \tau_{23} \circ (\Delta_{\uplus_q} \otimes \Delta_{\uplus_q})(u_2 \otimes v_2) \rangle \\
= &\langle (\uplus_q \otimes \uplus_q) \circ \tau_{23} \circ (\Delta_{conc} \otimes \Delta_{conc})(u_1 \otimes v_1) \mid u_2 \otimes v_2 \rangle.
\end{aligned}$$

Ta có điều cần chứng minh. □

Lưu ý rằng, với định nghĩa *trọng* của từ $w = y_{k_1} \ldots y_{k_n}$ là tổng các chỉ số tất cả các chữ cái của từ, tức là $(w) := k_1 + \ldots + k_n$, ta thấy rằng tích $q$-stuffle và đối tích $\Delta_{conc}$ đều có tính phân bậc theo trọng của từ. Điều này dẫn đến hệ quả rằng chúng là một cấu trúc đại số Hopf [8]. Hơn thế nữa, tính đối ngẫu của các tích và đối tích cho ta một cấu trúc đại số Hopf hình thành đồng thời như sau.

[8] $\tau_{2,3}$ ký hiệu một ánh xạ tuyến tính biến $u \otimes v$ thành $v \otimes u$ với mọi $u, v \in Y^*$.

**Mệnh đề 4.** *$(\mathbb{K}\langle Y\rangle, conc, 1_{Y^*}, \Delta_{⊎_q}, \varepsilon)$ là một song đại số.*

*Proof.* Sử dụng kết quả của Mệnh đề 2. Ta chỉ cần chứng minh $(\mathbb{K}\langle Y\rangle, \Delta_{⊎_q}, \varepsilon)$ là một đối đại số. Cũng nhờ mệnh đề này, ta chỉ cần chứng minh tính kết hợp của đối tích $\Delta_{⊎_q}$ trên các chữ cái. Với mỗi $y_k$, ta có[9]

$$(\Delta_{⊎_q} \otimes id)\Delta_{⊎_q}(y_k) = (id \otimes \Delta_{⊎_q})\Delta_{⊎_q}(y_k). \tag{14}$$

Thật vậy,

$$\begin{aligned}
(\Delta_{⊎_q} \otimes id)\Delta_{⊎_q}(y_k) &= (\Delta_{⊎_q} \otimes id)\Big(y_k \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes y_k + q \sum_{k_1+k_2=k} y_{k_1} \otimes y_{k_2}\Big) \\
&= y_k \otimes 1_{Y^*} \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes y_k \otimes 1_{Y^*} \\
&+ q \sum_{k_1+k_2=k} y_{k_1} \otimes y_{k_2} \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes 1_{Y^*} \otimes y_k \\
&+ q \sum_{k_1+k_2=k} \Big(y_{k_1} \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes y_{k_1} + q \sum_{k_{1,1}+k_{1,2}=k_1} y_{k_{1,1}} \otimes y_{k_{1,2}}\Big) \otimes y_{k_2} \\
&= y_k \otimes 1_{Y^*} \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes y_k \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes 1_{Y^*} \otimes y_k \\
&+ q \sum_{k_1+k_2=k} (y_{k_1} \otimes y_{k_2} \otimes 1_{Y^*} + y_{k_1} \otimes 1_{Y^*} \otimes y_{k_2} + 1_{Y^*} \otimes y_{k_1} \otimes y_{k_2}) \\
&+ q^2 \sum_{k_1+k_2+k_3=k} (y_{k_1} \otimes y_{k_2} \otimes y_{k_3}).
\end{aligned}$$

Tương tự, ta cũng có

$$\begin{aligned}
(id \otimes \Delta_{⊎_q})\Delta_{⊎_q}(y_k) &= y_k \otimes 1_{Y^*} \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes y_k \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes 1_{Y^*} \otimes y_k \\
&+ q \sum_{k_1+k_2=k} (y_{k_1} \otimes y_{k_2} \otimes 1_{Y^*} + y_{k_1} \otimes 1_{Y^*} \otimes y_{k_2} + 1_{Y^*} \otimes y_{k_1} \otimes y_{k_2}) \\
&+ q^2 \sum_{k_1+k_2+k_3=k} (y_{k_1} \otimes y_{k_2} \otimes y_{k_3}).
\end{aligned}$$

Mặt khác, với mỗi chữ cái $y_k$,

$$\begin{aligned}
(id \otimes \varepsilon) \circ \Delta_{⊎_q}(y_k) &= (id \otimes \varepsilon)(y_k \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes y_k + q \sum_{k_1+k_2=k} y_{k_1} \otimes y_{k_2}) \\
&= y_k = (\varepsilon \otimes id) \circ \Delta_{⊎_q}(y_k).
\end{aligned}$$

□

Hơn thế nữa, ta biết rằng nếu một song đại số $(\mathcal{B}, \mu, 1_{\mathcal{B}}, \Delta, \varepsilon)$ có tính phân bậc[10], liên thông (không nhất thiết giao hoán), ta có thể tính toán giải tích trên lân cận của 1 đối với tích chập[11] (convolution product), ký hiệu bởi $\star$, theo cách sau. Với $\mathsf{e} = 1_{\mathcal{B}} \circ \varepsilon$ là phần tử trung hòa của tích chập. Bằng cách viết $Id_{\mathcal{B}} = I = \mathsf{e} + I^+$, ta có hai phép chiếu của phân tích $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \oplus \Big(\bigoplus_{n\geq 1} \mathcal{B}_n\Big)$. Giả sử $T(1+z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, ta có thể thiết lập $T(I)$ bởi[12]

$$T(I) = a_0 \mathsf{e} + \sum_{n\geq 1} a_n (I^+)^{\star n}. \tag{15}$$

[9] $id$ ký hiệu ánh xạ đồng nhất trong $\mathbb{K}\langle Y\rangle$.
[10] $\mathcal{B} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$, tất cả các phần tử $(\mu, 1_{\mathcal{B}}, \Delta, \varepsilon)$ là phân bậc và $\mathcal{B}_0 = \mathbb{K}.1_{\mathcal{B}}$
[11] Tích chập của $S, T \in Hom(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ là $S \star T = \mu \circ (S \otimes T) \circ \Delta$
[12] Trên thực tế, với mọi $b \in \mathcal{B}$, tổng $\sum_{n\geq 1} a_n (I^+)^{\star n}(b)$ là hữu hạn.

Tính toán này rõ ràng tương thích với tích chập vì với mọi $S, T \in \mathbb{K}[[1+z]]$, ta có $S(I) \star T(I) = ST(I)$. Điều này cho phép ta tính được antipode với chuỗi $(1+X)^{-1} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n X^n$ và xa hơn với chuỗi $log(1+X) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} X^n$.

Đối với việc tồn tại antipode, biết rằng

$$S = I^{\star -1} = (\mathsf{e} + I^+)^{\star -1} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n (I^+)^{\star n} \tag{16}$$

Trong mọi trường hợp[13], ta luôn có

$$\mathsf{e} = S \star I = S \star (\mathsf{e} + I^+) = S + S \star I^+ \Rightarrow S = \mathsf{e} - S \star I^+ = \mathsf{e} - \mu \circ (S \otimes I^+) \circ \Delta. \tag{17}$$

Để ý rằng, công thức này cho ta một cách tính truy hồi để tìm antipode mỗi khi $\Delta_+$ lũy linh [10]. Trong trường hợp khác, việc tính toán này có thể vẫn đưa đến một antipode như mong muốn, chẳng hạn như khi một đại số Hopf chứa một phần tử kiểu-nhóm (group-like) $g \neq 1$, ta có $S(g)g = 1$ và $gS(s) = 1$ cho nên $S(g) = g^{-1}$.

Do vậy, giả sử $\star_1$ là tích chập trong $Hom(\mathcal{B}_q^{\uplus}, \mathcal{B}_q^{\uplus})$, khi đó $(I^+)^{\star_1 n} = \uplus_q^{n-1} \circ (I^+)^{\otimes n} \circ \Delta_{conc}^{n-1}$, và song đại số $\mathcal{B}_q^{\uplus}$ trở thành một đại số Hopf

$$\mathcal{H}^{\vee}_{\uplus_q} := (\mathbb{K}\langle Y\rangle, \uplus_q, 1_{Y^*}, \Delta_{conc}, \varepsilon, \mathcal{S}^{\uplus_q}), \tag{18}$$

với antipode $\mathcal{S}^{\uplus_q}$ được xác định bởi

$$\mathcal{S}^{\uplus_q}(w) := \sum_{k\geq 0}(-1)^k (I^+)^{\star_1 k}(w). \tag{19}$$

Hơn nữa, antipode $\mathcal{S}^{\uplus_q}$ còn được xác định bằng công thức truy hồi [2, 4, 8, 15] : $\mathcal{S}^{\uplus_q}(1_{Y^*}) = 1_{Y^*}$, và với mọi từ $w$, $(w) \geq 1$,

$$\mathcal{S}^{\uplus_q}(1_{Y^*}) = 1_{Y^*}, \quad \mathcal{S}^{\uplus_q}(w) = -\uplus_q(\mathcal{S}^{\uplus_q} \otimes I^+)\Delta_{conc}(w), \forall w \in Y^* \setminus \{1_{Y^*}\}. \tag{20}$$

Chúng ta sẽ trình bày một cách tường minh việc xác định công thức này. Trước hết, với mỗi số nguyên dương $m$, ta gọi $J = (i_1, \ldots, i_n)$ là một *hợp thành* của $m$ nếu $i_1 + \ldots + i_n = m$ (với $i_k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$). Mỗi hợp thành này tác động lên từ có độ dài $m$ như một ánh xạ từ $\mathbb{K}Y^m \to \mathbb{K}Y^n$. Cụ thể, giả sử $w = y_{k_1} \ldots y_{k_m}$, ta định nghĩa

$$J[w] = q^{m-n} y_{k_1+\ldots+k_{i_1}} y_{k_{i_1+1}+\ldots+k_{i_2}} \cdots y_{k_{i_{n-1}+1}+\ldots+k_m}. \tag{21}$$

Ta ký hiệu $C_m$ là tập hợp tất cả các hợp thành của $m$. Khi đó antipode xác định bởi công thức dưới đây.

**Mệnh đề 5.** *Với mọi $w = y_{k_1} \ldots y_{k_m} \in Y^*$, antipode $\mathcal{S}^{\uplus_q}$ được xác định bởi*

$$\mathcal{S}^{\uplus_q}(w) = (-1)^m \sum_{J \in C_m} J[y_{k_m} \ldots y_{k_1}]. \tag{22}$$

**Ví dụ 3.** Với $w = y_{s_1} y_{s_2} y_{s_3}$, ta có các hợp thành của $m = 3$ và các tác động tương ứng:

$$\begin{array}{llll} J_1 = (1,1,1) & \to J_1[y_{s_1}y_{s_2}y_{s_3}] = y_{s_1}y_{s_2}y_{s_3}, & J_3 = (1,2) & \to J_3[y_{s_1}y_{s_2}y_{s_3}] = q y_{s_1} y_{s_2+s_3}, \\ J_2 = (2,1) & \to J_2[y_{s_1}y_{s_2}y_{s_3}] = q y_{s_1+s_2} y_{s_3}, & J_4 = (3) & \to J_4[y_{s_1}y_{s_2}y_{s_3}] = q^2 y_{s_1+s_2+s_3}. \end{array}$$

Do đó

$$\mathcal{S}^{\uplus_q}(y_{s_1}y_{s_2}y_{s_3}) = (-1)^3 \sum_{J \in C_3} J[y_{s_1}y_{s_2}y_{s_3}] = -y_{s_1}y_{s_2}y_{s_3} - q(y_{s_1+s_2}y_{s_3} + y_{s_1}y_{s_2+s_3}) - q^2 y_{s_1+s_2+s_3}.$$

[13] $\Delta_+$ là lũy linh địa phương hoặc không.

*Proof.* (Mệnh đề 5) Với từ $w = y_{k_1} \dots y_{k_m}$, khai triển công thức (20), ta được

$$\mathcal{S}^{\uplus_q}(w) = -\sum_{j=0}^{m-1} \mathcal{S}^{\uplus_q}(y_{k_1} \dots y_{k_j}) \uplus_q (y_{k_{j+1}} \dots y_{k_m}). \tag{23}$$

Từ đây ta dễ dàng có được kết quả bằng cách sử dụng giả thiết quy nạp (xem [2, 4, 3]). □

Một cách tương tự, ta cũng xây dựng một cấu trúc đại số Hopf (xem [2, 4, 3])

$$\mathcal{H}_{\uplus_q} := (\mathbb{K}\langle Y\rangle, conc, 1_{Y^*}, \Delta_{\uplus_q}, \varepsilon, \mathcal{S}_q^{conc}). \tag{24}$$

Trong đó antipode $\mathcal{S}_q^{conc}$ được xác định bởi công thức

$$\mathcal{S}_q^{conc}(w) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k (I^+)^{\star_2 k}(w), \tag{25}$$

trong đó, $\star_2$ ký hiệu tích chập của song đại số $(\mathbb{K}\langle Y\rangle, conc, 1_{Y^*}, \Delta_{\uplus_q}, \varepsilon)$. Hay rõ hơn

$$\mathcal{S}_q^{conc}(w) = -conc(\mathcal{S}_q^{conc} \otimes I^+)\Delta_{\uplus_q}(w). \tag{26}$$

Ước lượng công thức này, chúng tôi thu được công thức tường minh sau (xem [2, 4, 3]).

**Mệnh đề 6.** *Với mỗi từ $w$,*

$$\mathcal{S}_q^{conc}(w) = \sum_{v \in J^{-1}[\overline{w}]} (-1)^{|v|} v,$$

*trong đó $\overline{w} = y_{k_m} \dots y_{k_1}$ nếu $w = y_{k_1} \dots y_{k_m}$ và $J^{-1}[w] := \{v \mid supp(J[v]) = w$ với mỗi $J \in C_{|w|}\}$.*

## 4. ĐẲNG CẤU GIỮA CÁC ĐẠI SỐ

Cấu trúc đại số Hopf vừa thành lập ở trên biến dạng theo tham số $q$, nhưng chúng luôn bảo toàn bậc trong mọi trường hợp. Hơn thế nữa, chúng còn đẳng cấu với nhau thông qua ánh xạ mà ta sẽ xây dựng dưới đây.

Xét ánh xạ tuyến tính $\varphi : \mathbb{K}\langle Y\rangle \longrightarrow \mathbb{K}\langle Y\rangle$ với $\varphi(1) = 1$ và với mỗi từ khác rỗng $w \in Y^*$,

$$\varphi(w) = \sum_{(i_1,\dots,i_k) \in C(|w|)} \frac{1}{i_1! \dots i_k!} (i_1, \dots, i_k)[w] \tag{27}$$

**Ví dụ 4.**

$$\varphi(y_{s_1} y_{s_2} y_{s_3}) = y_{s_1} y_{s_2} y_{s_3} + \frac{q}{2}(y_{s_1+s_2} y_{s_3} + y_{s_1} y_{s_2+s_3}) + \frac{q^2}{6} y_{s_1+s_2+s_3}.$$

**Định lý 7.** *$\varphi$ thành lập như trên là một đẳng cấu đại số từ $(\mathbb{K}\langle Y\rangle, ⧢)$ vào $(\mathbb{K}\langle Y\rangle, \uplus_q)$.*

*Proof.* (Xem thêm [11]) Trước hết, ta chứng minh $\varphi$ là một đồng cấu, tức là với mọi $u, v$, $\varphi(u ⧢ v) = \varphi(u) \uplus_q \varphi(v)$. Giả sử $u = y_{s_1} \dots y_{s_n}$, $v = y_{t_1} \dots y_{t_m}$. Dễ thấy rằng $\varphi(u ⧢ v)$ và $\varphi(u) \uplus_q \varphi(v)$ là đa thức của những từ có dạng[14]

$$[u_1 v_1] \dots [u_l v_l], \tag{28}$$

trong đó, $u_1 \dots u_l = u$ và $v_1 \dots v_l = v$ và với mỗi $1 \leq i \leq l$, có nhiều nhất $u_i$ hoặc $v_i$ là từ rỗng. Ta thấy rằng, thành phần (28) xuất hiện trong $\varphi(u) \uplus_q \varphi(v)$ với hệ số (không bao gồm tham số $q$) là $\frac{1}{|u_1|!|v_1|! \dots |u_l|!|v_l|!}$. Mặt khác, (28) xuất hiện trong $\varphi(u ⧢ v)$ từ các thành phần của tích $u ⧢ v$ là $\frac{|u_1 v_1|! \dots |u_l v_l|!}{|u_1|! \dots |u_l|!|v_1|! \dots |v_l|!}$ sau đó áp dụng qua ánh xạ $\varphi$ với hệ số $\frac{1}{|u_1 v_1|! \dots |u_l v_l|!}$.

[14] Với mỗi từ $w = y_{k_1} \dots y_{k_n}$, ta ký hiệu $[w] = [y_{k_1} \dots y_{k_n}] = q^{n-1} y_{k_1+\dots+k_n}$.

Để chứng minh tính đẳng cấu, ta viết lại

$$\varphi(w) = \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in\mathcal{C}(|w|)} a_{i_1}\ldots a_{i_k}(i_1,\ldots,i_k)[w],$$

trong đó, $a_{i_l} = \frac{1}{i_l!}, \forall 1 \le l \le k$ và để ý rằng $a_{i_l}$ chính là hệ số của $t^{i_l}$ trong khai triển Maclaurin của hàm số $f(t) = \exp(t) - 1$. Ta sẽ chứng minh nghịch đảo của $\varphi$ là

$$\psi(w) = \sum_{(j_1,\ldots,j_k)\in\mathcal{C}(|w|)} b_{j_1}\ldots b_{j_k}(j_1,\ldots,j_k)[w],$$

trong đó $b_{j_l} = \frac{(-1)^{j_l-1}}{j_l}, \forall 1 \le l \le k$, chính là hệ số của $t^{j_l}$ trong khai triển Maclaurin của $f^{-1}(t) = \log(t+1)$ trên miền $\mathcal{D} = (0,\infty)$. Thật vậy, với mỗi $K = (k_1,\ldots,k_l) \in \mathcal{C}(|w|)$, hệ số của $K[w]$ trong $\psi\varphi(w)$ là[15]

$$\sum_{J\circ I=K} b_{j_1}\ldots b_{j_l} a_{i_1}\ldots a_{i_{|J|}}. \tag{29}$$

Ta phải chứng minh rằng biểu thức (29) bằng $1$ nếu $K$ là dãy $(1,\ldots,1)$ và bằng $0$ cho các trường hợp còn lại. Ta có thể thấy điều này bằng cách xem các biến $t_1, t_2, \ldots$ là giao hoán và (29) chính là hệ số của $t_1^{k_1}\ldots t_l^{k_l}$ trong khai triển $t_1\ldots t_l = f^{-1}(f(t_1))\ldots f^{-1}(f(t_l))$. $\square$

Hơn thế nữa, đồng cấu đại số $\varphi$ còn tương thích với đối tích và antipode (Xem thêm [11]) để thực sự là một đẳng cấu đại số Hopf giữa hai cấu trúc đại số này.

## 5. KẾT LUẬN

Bằng cách đưa vào một tham số $q$ biến dạng, chúng tôi đã định nghĩa một dạng tổng quát của tích đan và tích stuffle, gọi tắt là tích $q$-stuffle ($\uplus_q$), có nhiều ý nghĩa toán học. Từ tích này, một cặp đại số Hopf đối ngẫu đã hình thành và chúng luôn đẳng cấu với nhau trong mọi trường hợp của tham số $q$. Những kết quả này làm nền tảng cho những nghiên cứu sâu hơn và chúng tôi sẽ sử dụng chúng trong việc tìm cấu trúc của các hàm đặc biệt sẽ được trình bày ở các nghiên cứu tiếp theo.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Kuo-Tsai Chen. Iterated integrals and exponential homomorphisms. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 4:502--512, 1954.

[2] Bui Van Chien. Hopf algebras of shuffle and quasi-shuffle & Construction of dual bases. Master's thesis, Laboratoire LIPN - Université Paris 13, 9 2012.

[3] Bui Van Chien. *Développement asymptotique des sommes harmoniques*. PhD thesis, Laboratoire LIPN - Université Paris 13, 2016.

[4] Bui Van Chien, G. H. E. Duchamp, and V. Hoang Ngoc Minh. Schützenberger's factorization on the (completed) Hopf algebra of $q$-stuffle product. *JP J. Algebra Number Theory Appl.*, 30(2):191--215, 2013.

[5] Bui Van Chien, G. H. E. Duchamp, and V. Hoang Ngoc Minh. Structure of polyzetas and explicit representation on transcendence bases of shuffle and stuffle algebras. *J. Symbolic Comput.*, 83:93--111, 2017.

[15] Với $J = (j_1,\ldots,j_l), I = (i_1,\ldots,i_{|J|})$, trong đó $|J| = j_1 + \ldots + j_l$, ta định nghĩa $J \circ I = (i_1 + \ldots + i_{j_1}, \ldots, i_{|J|-j_l+1} + \ldots + i_{|J|})$.

[6] Bui Van Chien, Gérard H. E. Duchamp, and Hoang Ngoc Minh. Computation tool for the $q$-deformed quasi-shuffle algebras and representations of structure of MZVs. *ACM Commun. Comput. Algebra*, 49(4):117--120, 2015.

[7] Bui Van Chien, Gérard H. E. Duchamp, Hoang Ngoc Minh, Ladji Kane, and Cristophe Tollu. Dual bases for noncommutative symmetric and quasi-symmetric functions via monoidal factorization. *J. Symbolic Comput.*, 75:56--73, 2016.

[8] Richard Ehrenborg. On posets and Hopf algebras. *Adv. Math.*, 119(1):1--25, 1996.

[9] Samuel Eilenberg and Saunders MacLane. On the groups $H(\Pi, n)$. III. *Ann. of Math. (2)*, 60:513--557, 1954.

[10] M. Hazewinkel. *Handbook of Algebra*. Number vol. 6 in Handbook of Algebra.

[11] Michael E. Hoffman. Quasi-shuffle products. *J. Algebraic Combin.*, 11(1):49--68, 2000.

[12] Donald Knutson. *$\lambda$-rings and the representation theory of the symmetric group*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 308. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.

[13] Rimhak Ree. Lie elements and an algebra associated with shuffles. *Ann. of Math. (2)*, 68:210--220, 1958.

[14] Christophe Reutenauer. *Free Lie algebras*, volume 7 of *London Mathematical Society Monographs. New Series*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1993. Oxford Science Publications.

[15] William R. Schmitt. Antipodes and incidence coalgebras. *J. Combin. Theory Ser. A*, 46(2):264--290, 1987.

# ALGEBRA OF SHUFFLE PRODUCT AND ITS EQUIVALENCES

**Bui Van Chien, Bui Van Hieu**
Faculty of Mathematics, University of Sciences, Hue University
Email: bvchien@hueuni.edu.vn

**ABSTRACT**

The goal of this paper is to explore a general form of the shuffle and stuffle products by giving a parameter $q$ which belong to a field extension of the field of rational numbers. Such a parameter $q$ gives rise to a Hopf algebra which is proved to be isomorphic to the shuffle Hopf algebra.

**Keywords:** Hopf algebra; shuffle product; quasi-shuffle product; algebra in words.

**Bùi Văn Chiến** sinh ngày 14/03/1986 tại Quảng Nam. Năm 2009 ông tốt nghiệp cử nhân khoa học ngành Toán tại trường Đại học Khoa học – Đại học Huế. Năm 2011 ông hoàn thành Master 1 chương trình cao học quốc tế tại Viện Toán học Hà Nội và tốt nghiệp Master Toán học tại Học viện Galile – trường Đại học Paris 13 năm 2012. Năm 2016 ông bảo vệ luận án tiến sĩ chuyên ngành Đại số tổ hợp tại Học viện Galile – trường Đại học Paris 13. Từ 2017 đến nay, ông là giảng viên tại Khoa Toán – trường Đại học Khoa học – Đại học Huế.

*Lĩnh vực nghiên cứu:* đại số tổ hợp và khoa học máy tính.